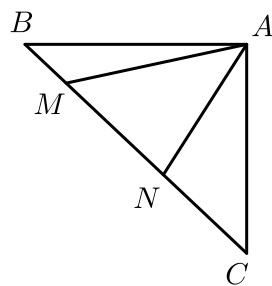


第2讲 旋转基本模型（加油站）

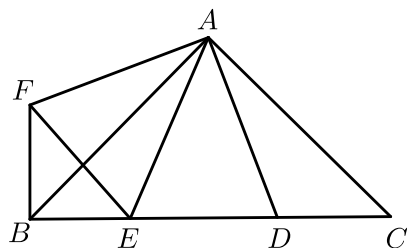
一、角含半角模型

练习1

1. 如图，在等腰直角三角形 ABC 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $AB = AC$ ，点 M, N 在边 BC 上，且 $\angle MAN = 45^\circ$ ，若 $BM = 1$ ， $CN = 3$ ，则 MN 的长是_____。



2. 如图， $\angle BAC = \angle DAF = 90^\circ$ ， $AB = AC$ ， $AD = AF$ ，点 D, E 为 BC 边上的两点，且 $\angle DAE = 45^\circ$ ，连接 EF, BF ，则下列结论：① $\triangle AFB \cong \triangle ADC$ ；② $\triangle ABD$ 为等腰三角形；③ $\angle ADC = 120^\circ$ ；④ $BE^2 + DC^2 = DE^2$ ，其中正确的有（ ）个。



A. 4

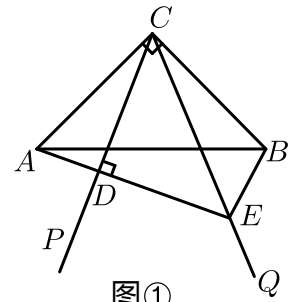
B. 3

C. 2

D. 1

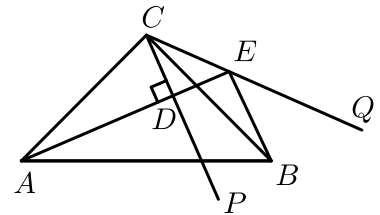
3. 如图：在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = BC$ ， $\angle PCQ = 45^\circ$ ，把 $\angle PCQ$ 绕点 C 旋转，在整个旋转过程中，过点 A 作 $AD \perp CP$ ，垂足为 D ，直线 AD 交 CQ 于 E 。

(1) 如图①，当 $\angle PCQ$ 在 $\angle ACB$ 内部时，求证： $AD + BE = DE$ 。



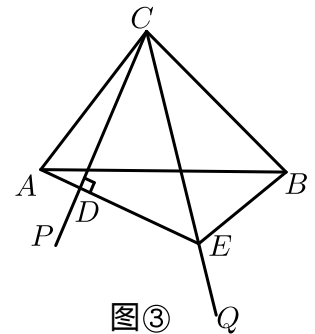
图①

(2) 如图②，当 CQ 在 $\angle ACB$ 外部时，则线段 AD 、 BE 与 DE 的关系为 _____。



图②

(3) 在(1)的条件下，若 $CD = 12$ ， $S_{\triangle BCE} = 2S_{\triangle ACD}$ ，求 AE 的长。



图③

4. 旋转变换在平面几何中有着广泛的应用，特别是在解（证）有关等腰三角形、正三角形、正方形等问题时，更是经常用到的思维方法，请你用旋转变换等知识，解决下面的问题．如图1， $\triangle ABC$ 与 $\triangle DCE$ 均为等腰直角三角形， DC 与 AB 交于点 M ， CE 与 AB 交于点 N ．

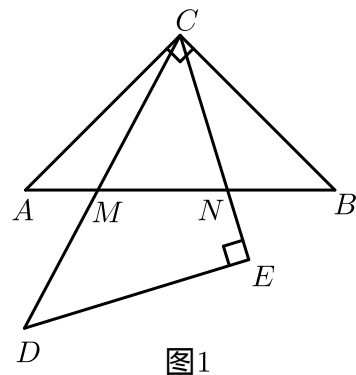


图1

- (1) 以点 C 为中心，将 $\triangle ACM$ 逆时针旋转 90° ，画出旋转后的图形，并证明 $AM^2 + BN^2 = MN^2$ ．
- (2) 如图2，在四边形 $ABCD$ 中， $\angle BAD = 45^\circ$ ， $\angle BCD = 90^\circ$ ， AC 平分 $\angle BCD$ ，若 $BC = 4$ ， $CD = 3$ ，则对角线 AC 的长度为多少？

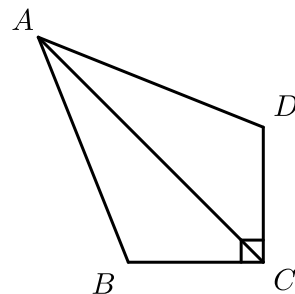
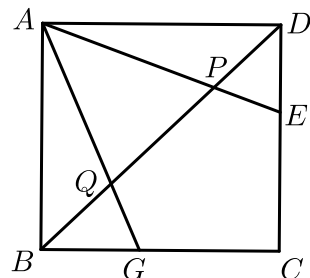


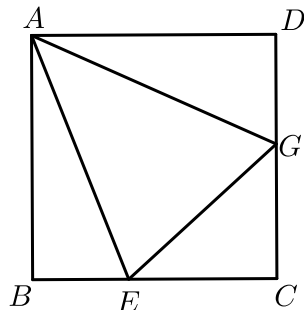
图2

练习2

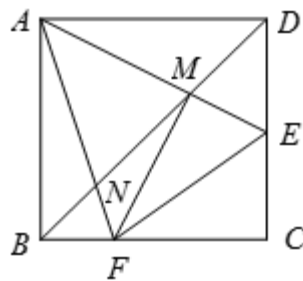
5. 如图，点 E 、 G 分别是正方形 $ABCD$ 的边 CD 、 BC 上的点，连接 AE 、 AG 分别交对角线 BD 于点 P 、 Q ，若 $\angle EAG = 45^\circ$ ， $BQ = 4$ ， $PD = 3$ ，则正方形 $ABCD$ 的边长为 _____ .



6. 如图，在正方形 $ABCD$ 中， E 是 BC 边上的一点， $BE = 4$ ， $EC = 8$ ，将正方形边 AB 沿 AE 折叠到 AF ，延长 EF 交 DC 于 G 。连接 AG ，现在有如下四个结论：① $\angle EAG = 45^\circ$ ；② $FG = FC$ ；③ $FC \parallel AG$ ；④ $S_{\triangle GFC} = 14$ 。其中结论正确的序号是 _____ .



7. 如图，正方形 $ABCD$ 中， E 、 F 为 CD 、 CB 上的点， $\angle EAF = 45^\circ$ ， BD 交 AE ， AF 于 M 、 N ，连接 MF 、 EF ，下列结论：
① $MN^2 = BN^2 + DM^2$ ；② $DE + BF = MF + ME$ ；③ $AM = MF$ 且 $AM \perp MF$ ；④若 E 为 CD 的中点，则 $\frac{BF}{BC} = \frac{1}{3}$ ，其中正确的有（ ）。



A. 4个

B. 3个

C. 2个

D. 1个

8. 在学习了等腰三角形的知识后，数学兴趣小组的同学们又进一步对等腰直角三角形的一些特殊线段之间的关系进行了探究．

(1) 【尝试探究】

问题：如图 (1)，在 $\text{Rt}\triangle ACB$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = CB$ ， $\angle DCE = 45^\circ$ ，试探究线段 AD 、 DE 、 EB 之间满足的等量关系．

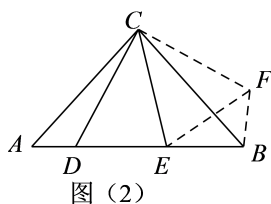
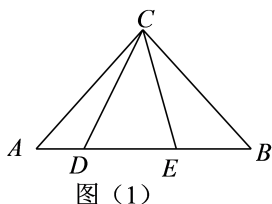
【探究发现】

如图 (2)，小聪同学作 $\triangle CBF \cong \triangle CAD$ ，连接 EF ，由已知条件易得 $\angle EBF =$ _____ 度， $\angle ECF = \angle ECB + \angle BCF = \angle ECB + \angle ACD =$ _____ 度．

再根据“边角边”，可证 $\triangle CEF \cong$ _____，得到 $EF =$ _____．

在 $\text{Rt}\triangle BEF$ 中，根据 _____ 定理，可得到 $BF^2 + BE^2 = EF^2$ ，

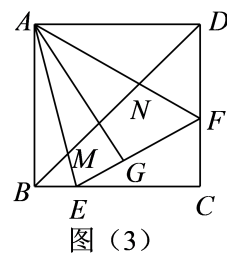
所以 AD 、 DE 、 EB 之间的等量关系是 _____．



(2) 【实践运用】

回答下列问题：

- ① 如图 (3)，在正方形 $ABCD$ 中， $\triangle AEF$ 的顶点 E 、 F 分别在 BC 、 CD 边上，高 AG 与正方形的边长相等，求 $\angle EAF$ 的度数．



- ② 在①的条件下，连接 BD ，分别交 AE 、 AF 于点 M 、 N ，若 $BE = 2$ ， $CF = 3$ ，则正方形的边长为 _____．
- ③ 在②的条件下， $BM = 2\sqrt{2}$ ，运用小聪同学探究的结论，直接写出 MN 的长为 _____．

9. 探究问题：

(1) 方法感悟：

如图①，在正方形 $ABCD$ 中，点 E, F 分别为 DC, BC 边上的点，且满足，连接 EF ， $\angle EAF = 45^\circ$ ，求证 $DE + BF = EF$ 。

感悟解题方法，并完成下列填空：

将 $\triangle ADE$ 绕点 A 顺时针旋转 90° 得到 $\triangle ABG$ ，

此时 AB 与 AD 重合，

由旋转可得： $AB = AD$ ， $BG = DE$ ， $\angle 1 = \angle 2$ ， $\angle ABG = \angle D = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle ABG + \angle ABF = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ ，

因此，点 G, B, F 在同一条直线上，

$\therefore \angle EAF = 45^\circ$ ，

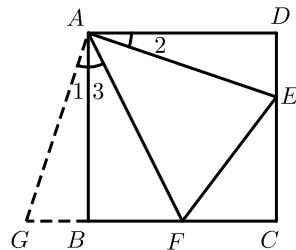
$\therefore \angle 2 + \angle 3 = \angle BAD - \angle EAF = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$ ，

$\therefore \angle 1 = \angle 2$ ， $\angle 1 + \angle 3 = 45^\circ$ ，即 $\angle GAF = \angle$ _____，

又 $AG = AE$ ， $AF = AF$ ，

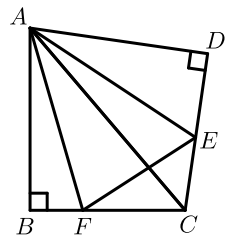
$\therefore \triangle GAF \cong \triangle$ _____，

$\therefore$ _____ = EF ，故 $DE + BF = EF$ 。



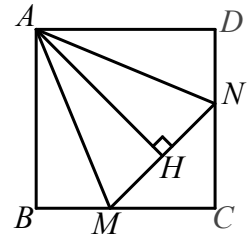
(2) 方法迁移：

如图②，将 $Rt\triangle ABC$ 沿斜边翻折得到 $\triangle ADC$ ，点 E, F 分别为 DC, BC 边上的点，且 $\angle EAF = \frac{1}{2} \angle DAB$ 。试猜想 DE, BF, EF 之间有何数量关系，并证明你的猜想。



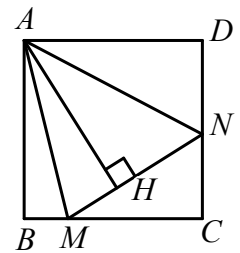
10. 在正方形 $ABCD$ 中, $\angle MAN = 45^\circ$, $\angle MAN$ 绕点 A 顺时针旋转, 它的两边分别交 CB 、 DC (或它们的延长线) 于点 M 、 N , $AH \perp MN$ 于点 H .

(1) 如图①, 当 $\angle MAN$ 绕点 A 旋转到 $BM = DN$ 时, 请你直接写出 AH 与 AB 的数量关系.



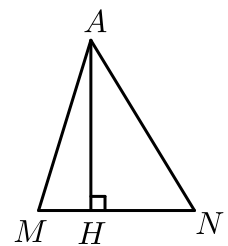
图①

(2) 如图②, 当 $\angle MAN$ 绕点 A 旋转到 $BM \neq DN$ 时, (1)中发现的 AH 与 AB 的数量关系还成立吗? 如果不成立, 请写出理由; 如果成立, 请证明.



图②

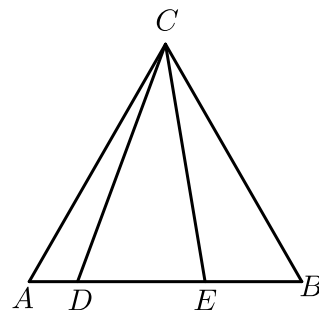
(3) 如图③, 已知 $\angle MAN = 45^\circ$, $AH \perp MN$ 于点 H , 且 $MH = 2$, $NH = 3$, 求 AH 的长.
(可用(2)中得到的结论)



图③

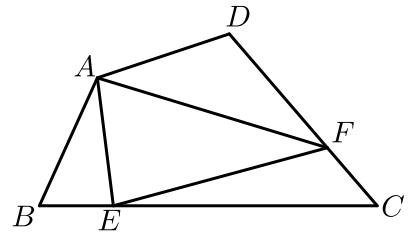
练习3

11. 已知：如图，等边三角形 ABC 中，点 D 、 E 在边 AB 上，且 $\angle DCE = 30^\circ$ 。则以线段 ED 、 AD 、 EB 为边长的三角形的形状是（ ）。



- A. 锐角三角形 B. 直角三角形 C. 钝角三角形 D. 不确定

12. 如图，在四边形 $ABCD$ 中， $\angle B + \angle D = 180^\circ$ ， $AB = AD$ ． E ， F 分别是线段 BC ， CD 上的点，且 $\angle EAF = \frac{1}{2}\angle BAD$ ．若 $EF = 11$ ， $BE = 3$ ，则 $DF = \underline{\hspace{2cm}}$ ．



13. 在四边形 $ABCD$ 中， $AB \perp AD$ ， $BC \perp CD$ ， $AB = BC$ ， $\angle ABC = 120^\circ$ ， $\angle MBN = 60^\circ$ ， $\angle MBN$ 绕 B 点旋转，它的两边分别交 AD ， DC （或它们的延长线）于 E ， F ．

（1）当 $\angle MBN$ 绕 B 点旋转到 $AE = CF$ 时（如图1），求证： $\triangle BEF$ 是等边三角形．

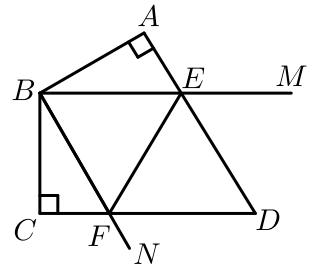


图 1

（2）当 $\angle MBN$ 绕 B 点旋转到 $AE \neq CF$ 时（如图2），线段 AE ， CF ， EF 之间存在怎样的数量关系？请证明．

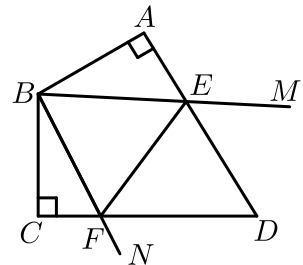


图 2

（3）当 $\angle MBN$ 绕 B 点旋转到 $AE \neq CF$ 时（如图3），线段 AE ， CF ， EF 之间存在怎样的数量关系？请直接写出该数量关系．

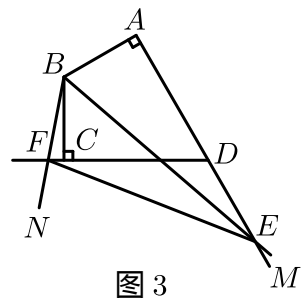
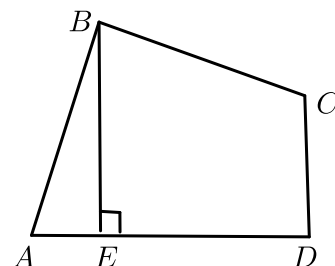


图 3

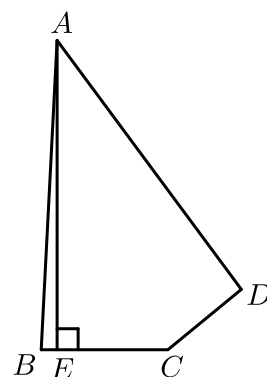
二、 对角互补模型

练习4

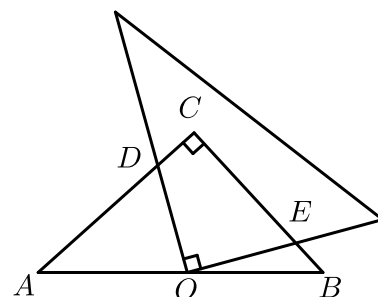
14. 在四边形 $ABCD$ 中, $AB = BC$, $\angle ABC = \angle CDA = 90^\circ$, $BE \perp AD$ 于 E , 四边形 $ABCD$ 的面积为8, 求 BE 的长.



15. 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$, $AB = AD$, $AE \perp BC$ 于点 E . 若 $AE = 17$, $BC = 8$, $CD = 6$, 则四边形 $ABCD$ 的面积为 _____.



16. 如图, 在等腰直角 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, 点 O 是 AB 的中点, 且 $AB = \sqrt{6}$, 将一块直角三角板的直角顶点放在点 O 处, 始终保持该直角三角板的两直角边分别与 AC 、 BC 相交, 交点分别为 D 、 E , 则 $CD + CE = (\quad)$.



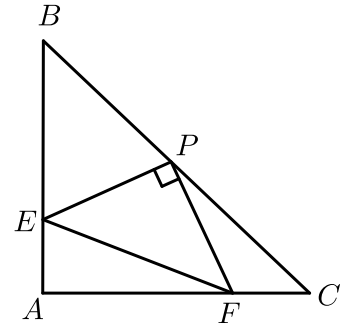
A. $\sqrt{2}$

B. $\sqrt{3}$

C. 2

D. $\sqrt{6}$

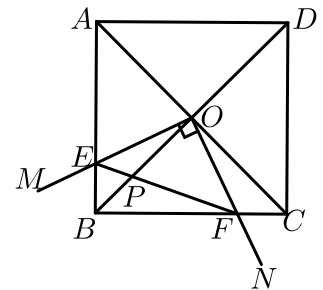
17. 如图：已知 $\triangle ABC$ ， $AB = AC$ ， $\angle BAC = 90^\circ$ ，直角 $\angle EPF$ 的顶点 P 是 BC 的中点，两边 PE ， PF 分别交 AB ， AC 与 E ， F ，给出以下五个结论：① $CF = AE$ ；② $2PF^2 = EF^2$ ；③ $\angle AEP + \angle AFP = 180^\circ$ ；④ $EF = CP$ ；⑤ $S_{\text{四边形}AEPF} = \frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$ ．上述结论中始终正确的有（ ）．



- A. ①②③④⑤ B. ①③④⑤ C. ①②④⑤ D. ①②③⑤

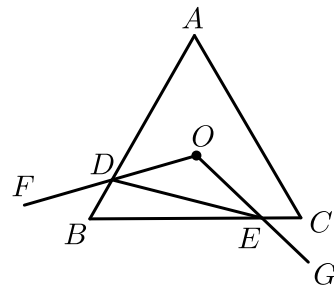
18. 如图，在正方形 $ABCD$ 中，点 O 为对角线 AC 的中点，过点 O 作射线 OM 、 ON 分别交 AB 、 BC 于点 E 、 F ，且 $\angle EOF = 90^\circ$ ， BO 、 EF 交于点 P ，则下列结论中：

- ① $\triangle OEF$ 是等腰直角三角形；
 ② 图形中全等的三角形只有两对；
 ③ $BE + BF = \sqrt{2}OA$ ；
 ④ 正方形 $ABCD$ 的面积等于四边形 $OEBF$ 面积的4倍，
 正确的结论有（ ）．

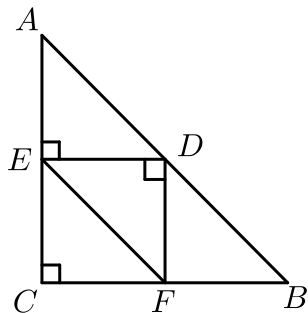


- A. 1个 B. 2个 C. 3个 D. 4个

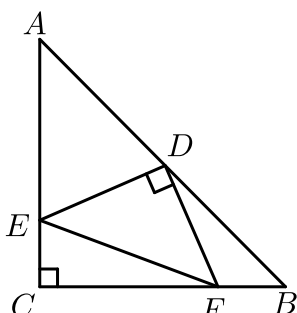
19. 如图，等边三角形 ABC 的边长为4，点 O 是 $\triangle ABC$ 的三边垂直平分线的交点， $\angle FOG = 120^\circ$ ，绕点 O 旋转 $\angle FOG$ ，分别交线段 AB 、 BC 于 D 、 E 两点，连接 DE ，给出下列四个结论：① $OD = OE$ ；② $S_{\triangle ODE} = S_{\triangle BDE}$ ；③ 线段 DE 的长始终等于2；④ 四边形 $ODBE$ 的面积始终等于 $\frac{4}{3}\sqrt{3}$ ．上述结论中正确的个数是（ ）．



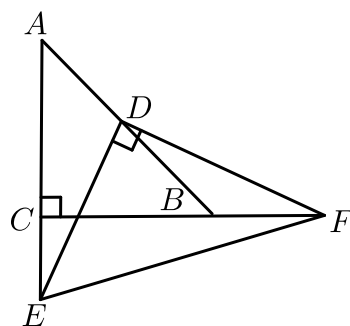
- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
20. 已知 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $AC = BC$ ， $\angle C = 90^\circ$ ，点 D 为 AB 边中点， $\angle EDF = 90^\circ$ ， $\angle EDF$ 绕点 D 旋转，它的两边分别交 AC ， CB （或它们的延长线）于点 E ， F ，当 $\angle EDF$ 绕点 D 旋转到 $DE \perp AC$ 于点 E 时（如图所示），易证 $S_{\triangle DEF} + S_{\triangle CEF} = \frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$ ．当 $\angle EDF$ 绕点 D 旋转到 DE 和 AC 不垂直时，在图②和图③这两种情况下，上述结论是否还成立？若成立，请给予证明；若不成立， $S_{\triangle DEF}$ ， $S_{\triangle CEF}$ ， $S_{\triangle ABC}$ 又有怎样的数量关系？请写出你的猜想，不需证明．



图①



图②



图③

21. 如图1, 已知 $\angle EOF = 120^\circ$, OM 平分 $\angle EOF$, A 是 OM 上一点, $\angle BAC = 60^\circ$, 且与 OF 、 OE 分别交于点 B 、 C .

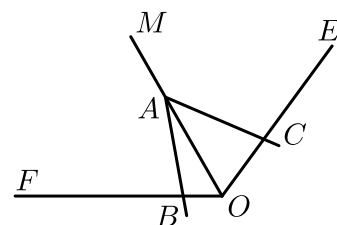


图 1

- (1) 求证: $AB = AC$.
- (2) 如图2, 在(1)中, 当 $\angle BAC$ 绕点 A 逆时针旋转使得点 B 落在 OF 的反向延长线上时, (1)中的结论是否还成立? 若成立, 给出证明; 若不成立, 说明理由.

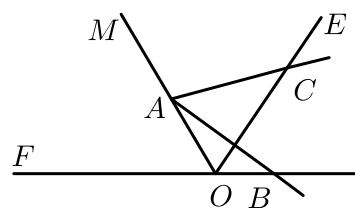


图 2

- (3) 如图3, 已知 $\angle AOC = \angle BOC = \angle BAC = 60^\circ$, 求证: $OC = OA + OB$.

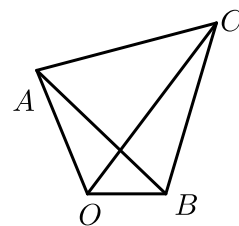
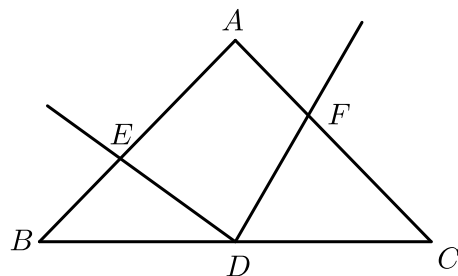


图 3

22. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 为 BC 边的中点，以点 D 为顶点的 $\angle EDF$ 的两边分别与边 AB ， AC 交于点 E ， F ，且 $\angle EDF$ 与 $\angle A$ 互补．

(1) 如图，若 $AB = AC$ ，且 $\angle A = 90^\circ$ ，则线段 DE 与 DF 有何数量关系？请直接写出结论．



(2) 如图，若 $AB = AC$ ，那么(1)中的结论是否还成立？若成立，请给出证明；若不成立，请说明理由．

